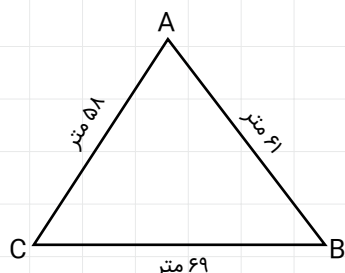


عباس قلعه پور اقدم

چگونه رسم می‌شود؟

زراعی مثلثی شکل، دایی من و فروشنده در مورد محاسبه مساحت این زمین به مشکل برخورد بودند. دایی که می‌دانست من ریاضی خوانده‌ام، با من تماس گرفت و از من خواست که مساحت زمین مثلثی شکلی را که طول اضلاع آن ۵۸، ۶۱ و ۶۹ متر بود، محاسبه کنم (شکل ۳).



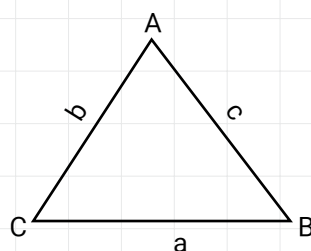
همان‌طور که می‌دانید، اغلب زمین‌های کشاورزی و باغ‌ها شکلی تقریباً شبیه مستطیل یا دوزنقه دارند و محاسبه مساحت آن‌ها کار خیلی دشواری نیست. ولی در مورد زمین مثلثی شکل که کمتر چنین موردی پیش می‌آید، محاسبه کار آسانی نیست. مگر اینکه شخص مورد نظر با فرمولی که به رابطه هرون معروف است و با آن می‌توان مساحت هر مثلثی را تنها با دانستن طول‌های سه ضلع و بدون دانستن ارتفاع محاسبه کرد، آشنایی داشته باشد. البته از هر فردی که حداقل تا دوره اول متوسطه را خوانده است، انتظار می‌رود که با فرمول مساحت مثلث که عبارت از نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده است، آشنایی داشته باشد.

ولی استفاده از این فرمول برای محاسبه مساحت زمین کشاورزی کار ساده‌ای نیست. چرا که به فرض اگر بخواهیم طول یکی از ارتفاع‌های مثلث سازنده زمین را به دست آوریم، باید از رأس مربوطه عمودی بر ضلع مقابل رسم کنیم که با توجه به پستی و بلندی‌هایی که وجود آن‌ها در چنین زمین‌هایی طبیعی است، کار سخت و شاید غیرممکنی باشد. حال برگردیم به داستان من و دایی و زمین مربوطه:

ابعاد زمین را که از دایی گرفتم، قول دادم تا چند دقیقه دیگر مساحت دقیق زمین را حساب کنم و به او بگویم. زود رابطه هرون را روی کاغذ نوشتم.

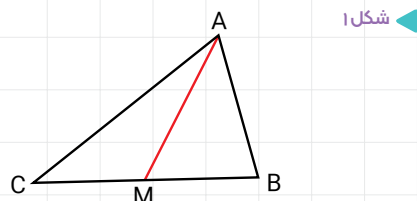
رابطه هرون: در مثلث ABC (شکل ۴)، اندازه‌های ضلع‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$BC=a, AC=b, AB=c$$



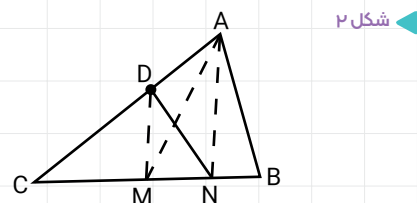
در این قسمت از «چگونه رسم می‌شود»، دو مسئله زیر را بررسی خواهیم کرد:

مسئله ۱. چگونه سطح یک مثلث را با رسم خطی که از یکی از رأس‌های آن می‌گذرد، به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم کنیم (شکل ۱).



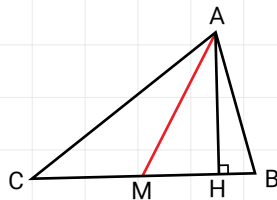
در شکل ۱، AM مثلث ABC را به دو مثلث هم مساحت تقسیم کرده است.

مسئله ۲. تقسیم سطح مثلث مفروض ABC به دو سطح هم مساحت با رسم خطی که از نقطه‌ای مانند D واقع بر یکی از ضلع‌های آن، مثلاً AC بگذرد (شکل ۲).



در شکل ۲، DN مثلث ABC را به دو قسمت هم مساحت تقسیم می‌کند.

حل مسئله ۱. ابتدا اجازه دهید داستانی را که برای خود من پیش آمده است و با موضوع این مقاله بی‌ارتباط نیست، برایتان نقل کنم: دایی من کشاورز است و در روستا زندگی می‌کند. چند سال پیش، در جریان خرید یک قطعه زمین



شکل ۶

• باید نشان بدهیم که میانه AM مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم کرده است. به عبارت دیگر باید نشان دهیم که مثلث‌های ABM و ACM هم‌مساحت‌اند. برای این کار چنین می‌نویسیم:

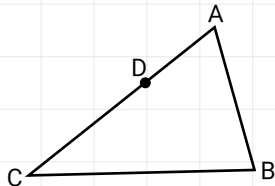
$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AH \cdot CM, S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} AH \cdot BM$$

• چون AM میانه است، پس: $CM=BM$. لذا خواهیم داشت:

$$S_{\triangle AMC} = S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$$

• پس برای تقسیم مثلث ABC در شکل ۱ کافی است یکی از میانه‌ها را رسم کنیم که در شکل ۱ میانه وارد بر ضلع BC رسم شده است.

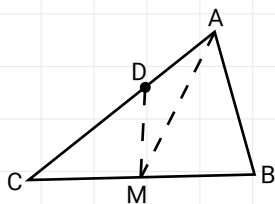
حل مسئله ۲. حالا فرض کنید زمینی مثلثی شکل که نام آن را ABC می‌گذاریم، به صورت شکل ۷ داریم که در نقطه D که روی ضلع AC مشخص شده است، مثلاً چاه آبی وجود دارد (شکل ۷).



شکل ۷

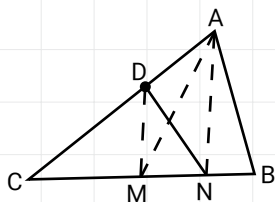
می‌خواهیم این زمین را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم، با این شرط که چاهی که در نقطه D قرار دارد در مرز قرار بگیرد. یعنی اینکه هر یک از صاحبان نصف زمین مجبور نباشند برای استفاده از آب چاه به داخل زمین دیگری وارد شوند، به عبارت ساده‌تر، یعنی خط تقسیم مانند مسئله ۱ از رأس نمی‌گذرد و باید از نقطه D بگذرد. برای این کار به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

• میانه AM را رسم و M را به D وصل می‌کنیم (شکل ۸).



شکل ۸

• از رأس A پاره‌خط AN را موازی DM رسم می‌کنیم و سپس D را به N وصل می‌کنیم (شکل ۹). جواب مسئله است که مثلث ABC را به دو قسمت هم‌مساحت DCN و ADN تقسیم می‌کند.



شکل ۹

سعی کنید مشابه مسئله ۱ درستی جواب مسئله ۲ را نیز پیدا کنید و اگر هم نتوانستید از دبیر محترمتان کمک بگیرید.

رابطه هرون برای محاسبه مساحت این مثلث به صورت زیر است:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}$$

در این رابطه معلوم است که $a+b+c$ برابر محیط مثلث است و $\frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط می‌شود که غالباً آن را با P نشان می‌دهند و رابطه هرون را به صورت زیر می‌نویسند:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

با توجه به اندازه‌هایی که از دایی گرفته بودم، محاسبه‌ها را به صورت زیر انجام دادم و نتیجه را به وی اعلام و خیالش را از دقیق بودن این محاسبه راحت کردم.

$$P = \frac{69+61+58}{2} = \frac{188}{2} = 94 \text{ متر}$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{94(94-69)(94-61)(94-58)} = \sqrt{2791800} = 1671$$

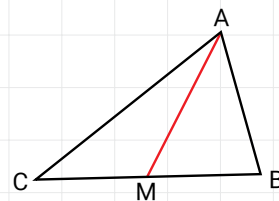
مترمربع

حالا می‌خواهم پرسشی را مطرح کنم که به دو مسئله‌ای که در ابتدا آورده شده‌اند، ارتباط دارد.

پرسش: اگر دایی از من می‌خواست این زمین را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنم، به‌طوری که دو قطعه زمین مثلثی شکل هم‌مساحت داشته باشیم، من چگونه باید پاسخ می‌دادم؟ این همان مسئله ۱ است. همان‌گونه که می‌دانید، برای تقسیم شکل‌هایی مانند دایره، مربع، مستطیل و متوازی‌الاضلاع به دو قسمت مساوی، کافی است یکی از قطر‌ها را رسم کنیم. ولی در مورد مثلث شرایط متفاوت است. پاسخ این پرسش را باید در یکی از اجزای فرعی مثلث که نام آن «میانه» است، جست‌وجو کرد. همان‌طور که می‌دانید، میانه در یک مثلث پاره‌خطی است که از یک رأس به وسط ضلع مقابل کشیده می‌شود. بنابراین هر مثلثی سه میانه دارد که هم‌رسانند؛ یعنی در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. میانه‌های مثلث چندین ویژگی دارند که یکی از آن‌ها، یعنی پاسخ مسئله ۱ به شرح زیر است که پس از بیان صورت آن، با استدلال هندسی، درستی آن را نشان می‌دهیم:

- هر یک از میانه‌های مثلث آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کنند.

• مثلث ABC را که در آن میانه نظیر رأس A (AM) رسم شده است در نظر می‌گیریم (شکل ۵).



شکل ۵

• ارتفاع نظیر رأس A یعنی AH را رسم می‌کنیم. علاوه بر اینکه ارتفاع نظیر رأس A در مثلث ABC است، ارتفاع نظیر رأس A در دو مثلث ABM و ACM نیز هست (شکل ۶).